

MATHEMATICA EN EL ANÁLISIS ECONÓMICO

JAVIER CAMPOS

CEMFI y Universidad de Las Palmas

ALEJANDRO REQUEJO

CEMFI y Universidad Complutense de Madrid

Tal como lo define su creador¹, *Mathematica* es un "sistema para hacer matemáticas con el ordenador". Se trata de un paquete informático cuyo objeto principal es realizar operaciones matemáticas, numéricas o simbólicas. Desde el punto de vista de un economista, el programa permite, aparte de las funciones usuales de análisis y representación de datos, la resolución de modelos teóricos con relativa eficiencia, rápidos análisis de sensibilidad y estática comparativa, simulación en entornos complejos y programación de todo tipo de cálculos rutinarios usuales en la economía aplicada.

Existen versiones de *Mathemática* disponibles para los principales sistemas operativos (MS-DOS, Macintosh, NeXT, Unix, VMS y Windows). Esta revisión se basa en la versión 2 para Windows por ser una de las más extendidas y con mayor facilidad de acceso para un usuario típico, aunque los comentarios que realizamos son aplicables a las otras versiones². Hay además una versión *enhancel* o avanzada y otra adaptada a las peculiaridades de la enseñanza, cuya principal diferencia radica en que esta última tiene menos potencia y recibe un nivel menor de apoyo técnico.

La versión 2.2.1 de *Mathematica* que comentamos requiere Windows 3.1, un ordenador con microprocesador 80386SX o posterior, coprocesador matemático (para la versión avanzada), al menos 4 MB de memoria RAM (aunque 8 MB sería lo recomendable) y 20 MB de espacio libre en el disco duro para la instalación básica y los ejemplos suministrados por el fabricante.

Mathematica entra dentro de la categoría de programas cuya implantación principal se reduce a ámbitos especializados de la investigación y la enseñanza. Entre sus principales capacidades se encuentran la posibilidad de realizar una amplia variedad de operaciones numéricas y simbólicas, la facilidad para representar gráficamente funciones y series de datos en dos y tres dimensiones y la aportación de un lenguaje

(1) Stephen Wolfram lideró el equipo de personas que desarrolló en 1988 los códigos principales de *Mathematica v.1*. Actualmente preside *Wolfram Research Inc.*, la empresa dedicada al desarrollo y la distribución del programa, cuya dirección es: 100 Trade Center Drive, Champaign (Illinois) 61820-7237 USA. Tfno: 217-398-0700. Fax: 217-398-0747. E-mail: info@wri.com. Stephen Wolfram es también el autor del manual más utilizado en la enseñanza y en la práctica con *Mathematica* (Wolfram, 1991).

(2) La última versión de *Mathematica* para Windows es la v.2.2.3, lanzada recientemente. Mantiene todas las características técnicas mencionadas para la v.2.2.1. y, además, se caracteriza por aprovechar mejor todas las capacidades del sistema, introducir mejoras en el trabajo en red y facilitar la actualización a Windows 95.

de programación de alto nivel que permite, de manera sencilla, la creación de programas que incluyen simultáneamente todas las habilidades anteriores. A través de *Mathematica* es posible, además, la conexión con programas externos, la importación y exportación de ficheros en diversos formatos y la posibilidad de crear documentos multimedia, denominados *notebooks*, que incluyen texto, gráficos animados, sonidos y expresiones matemáticas.

El potencial analítico de este programa es compartido por muchos paquetes de *software* matemático (por ejemplo, *Maple*, *Reduce*, *Derive*, *Macsyma* o *Axiom*). De todos ellos, *Maple* es actualmente el mayor competidor de *Mathematica* en el mundo de la investigación y la enseñanza. Sin embargo, este trabajo no pretende hacer una comparación entre los dos paquetes ya que la mayoría de los usuarios que optan por uno de ellos lo hacen movidos principalmente por razones relacionadas con las preferencias personales o la accesibilidad³. En el mundo de la economía aplicada *Mathematica* es el paquete de *software* matemático más conocido, debido sobre todo al trabajo de Varian (1993), cuyas aplicaciones comentaremos más adelante. No obstante, *Maple* presenta ciertas ventajas en su utilización en la enseñanza, ya que, a pesar de que su sintaxis es similar a la de *Mathematica*, las presentaciones finales de los resultados son mejores y más rápidas. Asimismo, debemos destacar que el esfuerzo de divulgación realizado por *Maple* ha sido mucho mayor, al incluir una parte de sus habilidades en paquetes estadísticos como *PV-Wave* y *MatLab* o en procesadores de texto en Latex como *Scientific WorkPlace*.

1. EL FUNCIONAMIENTO DE *MATHEMATICA*

Dado que *Mathematica* es un programa cuyo manejo es relativamente difícil de aprender, nuestra recomendación a cualquier usuario inexperto es que comience familiarizándose con algunos ejemplos sencillos. En este sentido, el manual editado por Wolfran (1991) incluye en sus primeras páginas un *Tour* que muestra las principales características del paquete. Una vez dados los primeros pasos, el aprendizaje avanza rápido y, en poco tiempo, cualquier operador puede comenzar a resolver sus propios problemas.

Mathematica está compuesto por tres elementos diferenciados pero perfectamente integrados entre sí. Por un lado se encuentra el *kernel* o núcleo de cálculo interno, encargado de realizar todas las operaciones y de ejecutar las instrucciones introducidas por el usuario. El *kernel* puede cargarse de manera automática o sólo cuando sea requerido y sus capacidades técnicas son comunes a todas las versiones 2 del programa. Su velocidad depende mucho de las características técnicas del ordenador en que se ejecute y, a medida que las operaciones que se quieren realizar sean más complicadas, el tamaño de memoria que tiene asignado deberá ser mayor. Para evitar problemas de agotamiento de la memoria, el operador puede hacer una asignación manual de la misma, sin otra limitación que las impuestas por configuración de su propio *hardware*.

El segundo elemento es el interfaz de relación con el usuario, denominado *front end*. En las versiones más antiguas de *Mathematica* para MS-DOS el programa fun-

(3) Puede encontrarse una reciente revisión de *Maple*, desde un enfoque econométrico, en Hutton, J. y J. Hutton (1995).

cionaba con un simple esquema *input-output*, en donde primero se tecleaba una instrucción en el *prompt* In [n]: = y se recibía entonces una respuesta denotada por Out [n]: =. Este modo de texto se mantiene en las versiones de *Mathematica* para algunos sistemas operativos (Unix o VMS), pero ya ha sido mejorada en las versiones para Windows y Macintosh, donde se permite la visualización y agrupación de comandos en celdas (que se ejecutan conjuntamente) y la agrupación de celdas en programas, los cuales pueden incluir un amplio número de instrucciones y textos explicativos. Cada celda contiene una clase particular de información (textos, gráficos, instrucciones o resultados) lo cual presenta varias ventajas importantes. En primer lugar, permite definir dentro de cada celda diversidad de estilos y fuentes que hacen la presentación más agradable y legible. En segundo lugar, en un mismo documento se pueden definir programas independientes entre sí, lo que facilita la ejecución y modificación de cada uno de ellos de forma separada. Sin embargo, cuando las instrucciones están ligadas unas con otras, resulta más conveniente agruparlas en una sola celda para facilitar la corrección de posibles errores.

El tercer componente de *Mathematica* es su amplia biblioteca de rutinas, que pueden ser invocadas para ejecutar funciones no incluidas en las más de 900 que el programa carga automáticamente. Estas rutinas, llamadas *packages*, abarcan un importante número de fórmulas específicas para álgebra lineal y matricial, cálculo, geometría, estadística, técnicas numéricas y de programación, representación gráfica y análisis discreto. Además, es posible que los usuarios definan sus propias funciones y *packages*, los cuales pueden ser luego fácilmente compartidos vía e-mail o transferencias ftp.

Por otra parte, uno de los aspectos más interesantes del programa consiste en las relaciones con programas externos. *Mathematica* puede leer instrucciones generadas en C o FORTRAN para incorporarlas en SHS documentos. También puede transformar los resultados obtenidos a esos lenguajes o a Latex. Además, es posible la comunicación de alto nivel con otros programas utilizando el mecanismo de comunicación *MathLink*. A través de este medio, se pueden incorporar funciones de programas externos dentro de un documento o, incluso, ejecutar *Mathematica* desde un programa externo.

Con respecto a la sintaxis de las instrucciones y, en general, a la comunicación del usuario con el programa, *Mathematica* se caracteriza por aplicar un reducido número de principios a un importante abanico de comandos. Las reglas requeridas para introducir cualquier instrucción son aplicables al resto de comandos que se precisen en un programa y, por tanto, a medida que se trabaja se reduce el coste de aprendizaje.

Las reglas más comunes relacionadas con la sintaxis son fáciles de enumerar. Como principios generales destacan los tres siguientes. En primer lugar, todos los argumentos de una función se escriben entre corchetes y no entre paréntesis para poder distinguirlos de la propia definición de la función. En segundo lugar, todos los comandos se caracterizan por no estar abreviados de ninguna forma y por tener la primera letra en mayúsculas. Por último, la mayoría de comandos poseen el mismo orden en su estructura: primero aparece el argumento de la función; luego se escriben las definiciones necesarias sobre los parámetros de la misma; y, finalmente, se añaden las opciones disponibles para el comando en cuestión. En cualquier caso, existe un amplio módulo de ayuda incorporado al programa que puede ser utilizado como paso previo a la consulta del manual.

2. APLICACIONES DE *MATHEMATICA* EN EL ANÁLISIS ECONÓMICO

Muy probablemente es en relación al número de aplicaciones desarrolladas específicamente para el ámbito de la economía la faceta en la cual este programa supera en mayor medida a sus rivales inmediatos. Ello se debe fundamentalmente a la influencia de Varían (1993), un libro en el que se detallan numerosos ejemplos de cómo muchos problemas económicos habituales pueden ser resueltos de una manera eficiente por *Mathematica*. Además suministra los packages específicamente diseñados para el ámbito económico que comentamos en este apartado, así como algunos ejemplos concretos de los mismos.

La principal utilidad de un programa matemático para un economista reside en su capacidad para resolver expresiones numéricas y simbólicas complicadas en un margen de tiempo muy razonable. Dado que existe una gran variedad de programas capaces de solucionar numéricamente cualquier problema, *Mathematica* resulta especialmente útil en el cálculo simbólico. Un ejemplo típico lo constituyen las técnicas de optimización estáticas y dinámicas, con y sin restricciones. A través de unas reglas sencillas, es posible pedir a *Mathematica* que obtenga condiciones de primer y segundo orden, valores críticos de cualquier función objetivo, la representación gráfica de ésta, y el análisis de estática comparativa. La mayoría de estas operaciones constituyen la esencia de la microeconomía neoclásica.

También resulta factible la aplicación de *Mathematica* a problemas sencillos de teoría de juegos. Por ejemplo, se puede construir un programa que permita computar todos los equilibrios de Nash de cualquier juego bipersonal con un número finito de estrategias, o, de manera similar, utilizar el ordenador para obtener gráfica y analíticamente los principales conceptos de solución en juegos cooperativos. Algunos artículos recientes [Rose (1993)] demuestran que *Mathematica* es también útil para dar nuevas soluciones a viejos problemas. El diseño de mecanismos con compatibilidad de incentivos, que necesita del álgebra asociada a Kuhn-Tucker o los usualmente tediosos cálculos de los modelos de equilibrio general con múltiples mercados pueden ser implementados a través de los correspondientes *packages*, permitiendo la obtención rápida de resultados y la comprobación inmediata de las reacciones ante cambios en diversos parámetros.

Aunque en menor número todavía, existen diversas aplicaciones del programa *Mathematica* al campo de la macroeconomía. Además de la sencilla simulación de políticas económicas en el contexto del equilibrio neoclásico, los cálculos asociados a modelos macroeconómicos dinámicos con expectativas racionales pueden ser resueltos con mayor facilidad por medio de las correspondientes rutinas. Los problemas de crecimiento, usando las propiedades de la expansión de series, también son un ejemplo de fácil aplicación.

Posiblemente sea la alta complejidad de los instrumentos financieros más recientes lo que haya hecho que *Mathematica* sea una herramienta popular en el campo de las finanzas. Los modelos de valoración de activos, opciones, derivados y, en general, todas las técnicas de cálculo estocástico han sido, de acuerdo con Miller (1990), los principales ámbitos de aplicación del programa en esta rama de la economía, sustituyendo o coexistiendo con los análisis usuales realizados a partir de hojas de cálculo.

Los paquetes de *software* matemático también pueden utilizarse para aplicaciones econométricas. *Mathematica* incluye un *package* de estadística que integra los elementos usuales de las técnicas descriptivas y de la teoría de la inferencia. A partir

de ahí se pueden construir programas de estimación sencillos, implementar métodos de análisis *bayesiano* o estimar modelos ARIMA de series temporales. Sin embargo, la eficiencia de estas aplicaciones es mucho menor que la obtenida en los paquetes econométricos usuales, por lo que su verdadera ventaja sólo aparece cuando se usan en combinación con programas externos como, por ejemplo, para el suministro de rutinas de optimización numérica a GAUSS.

Finalmente, hemos de hacer referencia a la idoneidad de *Mathematica* en la enseñanza de la economía. A pesar de que los procesadores matemáticos obtienen un mayor nivel de aceptación día a día, su aplicación efectiva en la docencia no pasa todavía de un papel meramente anecdótico. Es lógico reconocer que estos programas no sirven para que el alumno desarrolle intuiciones económicas por sí mismo, sino para que las ponga en funcionamiento a partir de un conocimiento suficiente de herramientas matemáticas y estadísticas. Como frecuentemente se señala, el riesgo que se corre con la utilización del ordenador en la enseñanza (especialmente con los paquetes econométricos) es que el alumno se acostumbra a no pensar más allá de los límites de su pantalla y no es capaz de razonar debidamente los procesos que le han conducido a la obtención de los resultados. Tal objeción se elimina en programas como *Mathematica*, en los que su estructura hace que la resolución de problemas se plantee dando los mismos pasos que se darían en una resolución manual de los mismos, utilizando el ordenador sólo para evitar cálculos tediosos.

3. VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE *MATHEMATICA*

El usuario típico de *Mathematica* atraviesa tres etapas claramente definidas. Cuando en los primeros días descubre, siguiendo las instrucciones de un manual, todas las posibilidades del programa entra en una fase de *euforia* en la que lamenta no haberlo conocido antes para haberse evitado todos esos cálculos tediosos que ha realizado a lo largo de su vida. A medida que encuentra callejones sin salida, expresiones no simplificables y soluciones complicadas a problemas sencillos, el *desencanto* se apodera del usuario, reconociendo, con rencor, que sólo se trata de un programa de ordenador. Sin embargo, cuando finalmente se aprende a convivir con las limitaciones, a esforzarse en superarlas y se recuerda que no existe nada gratuito en la economía, se entra en la fase más productiva, de *escepticismo creativo*, en la que *Mathematica* se convierte en una importante herramienta de trabajo que ayuda a resolver los problemas, no a plantearlos.

A continuación, comentamos las principales ventajas y desventajas con la que se encuentra el usuario de *Mathematica*. La primera dificultad es acostumbrarse a su sintaxis. El coste de aprendizaje y adaptación es relativamente alto en relación a los programas que habitualmente utiliza un economista medio, pero no difiere excesivamente de otros procesadores matemáticos o paquetes de programación. La segunda crítica se refiere a los requisitos de *hardware*. La velocidad de cálculo y el agotamiento de la memoria están directamente condicionados por el tipo de ordenador utilizado, la presencia de coprocesador matemático y la memoria RAM disponible. Cuando se ejecuta un amplio número de instrucciones, especialmente en cálculo simbólico, la habilidad de programación del usuario, eliminando las iteraciones innecesarias y los resultados intermedios, juega también un papel fundamental. La tercera y tal vez más importante crítica a *Mathematica* desde un punto de vista operativo es que muchas veces obtenemos resultados que no esperábamos y de los que no logramos averiguar su proceden-

cia. El problema radica siempre en una mala especificación del problema. Por ejemplo, cuando *Mathematica* resuelve un sistema de ecuaciones intenta encontrar todas las soluciones posibles, sin imponer a *priori* ningún supuesto sobre las variables que no haya sido explícitamente mencionado. El usuario puede saber que algunas de las variables o de los parámetros utilizados son números reales positivos, pero *Mathematica* no lo sabe si no se le dice. Otras veces, operaciones sencillas como tomar logaritmos, obtener raíces cuadradas o, incluso, hacer una simple división conducen a errores porque olvidamos que las variables no pueden ser negativas o tomar valor cero, según el caso. Afortunadamente, los mensajes de error suelen ser bastante clarificadores y el problema se corrige fácilmente.

Con respecto a los aspectos positivos del programa, la mayoría de sus habilidades técnicas para la realización de operaciones numéricas y simbólicas ya han sido puestas de manifiesto. Sin embargo, dos elementos merecen especial mención en comparación a otros procesadores matemáticos alternativos que cumplen las mismas funciones. *Mathematica* ofrece un grado de flexibilidad muy elevado, a partir del cual el usuario puede crear sus propias funciones matemáticas que actúan a partir de instrucciones determinadas. Esto permite abordar problemas muy personalizados sin depender de las capacidades residentes originalmente en el programa. En segundo lugar, como se ha mencionado anteriormente, la relación de *Mathematica* con paquetes externos es muy buena, y no sólo en el entorno Windows. La exportación de expresiones a códigos en C o FORTRAN, la traducción de resultados a códigos Latex o la conversión de imágenes a formato Postscript resulta bastante eficiente y fácil.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Hutton, J. y J.Hutton (1995): "The *Maple* Computer Algebra System: A Review ", *Journal of Applied Econometrics*, 10, págs. 329-337.
- Miller, R. (1990): *Computer-aided Financial Analysis*, Addison-Wesley.
- Rose, C. (1993): "Equilibrium and Adverse Selection", *Rand Journal of Economics*, 24,4, págs. 559-569.
- Varian, H. (ed.) (1993): *Economic and Financial Modeling with Mathematica*, Springer-Verlag.
- Wolfram, S. (1991): *Mathematica: a System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley.

APÉNDICE

Este apartado final recoge información de utilidad tanto para el usuario ocasional como para el profesional de *Mathematica*. Una de las grandes ventajas del programa frente a cualquiera de los paquetes rivales es su nivel de difusión. Existe una amplia bibliografía sobre el mismo que incluye no sólo manuales de referencia y guías al usuario sino diferentes aplicaciones en todos los campos de la ciencia. En economía y finanzas destacan especialmente Varian (1993) y Miller (1990), aunque la Tabla 1 proporciona una lista actualizada de manuales y textos de referencia general sobre *Mathematica*, tanto en castellano como en inglés.

Existe además una publicación de carácter trimestral, *The Mathematica Journal*, que incluye noticias y nuevas aplicaciones desarrolladas por los usuarios⁴. Contiene además un suplemento electrónico que aporta rutinas, programas y paquetes de utilidad. La mayoría de estas aplicaciones se encuentran también disponibles en *MathSource*, una biblioteca electrónica de acceso gratuito (basta con enviar un e-mail a mathsource@wri.com indicando en el cuerpo del mensaje `help intro`).

Finalmente, con respecto al apoyo técnico al usuario, *Mathematica* es un programa ejemplar en este sentido. Aparte del contacto a través del distribuidor autorizado, es posible obtener información sobre dudas y cuestiones relacionadas con el funcionamiento del paquete vía electrónica en info-europe@wri.com y apoyo técnico en support-europe@wri.com. Hay también un animado grupo de debate vía e-mail denominado *MathGroup* y puede obtenerse amplia y actualizada documentación, así como ayuda detallada en las numerosas páginas de WWW relacionadas con *Mathematica* (<http://www.wri.com>) y en USENET, en el grupo sobre informática denominado `comp.soft.sys.math.mathematica`.

(4) Puede contactarse con *The Mathematica Journal* a través de Miller Freeman Inc., P.O.Box 420096, Palm Coast, FL 32142-0096. También existe una publicación trimestral denominada *Mathematica in Education and Research*, editada por el Department of Mathematics, Sonoma State University, 1801 East Cotati Avenue, Rohnert Park, CA 94928. E-mail: wellin@sonoma.edu y una revista electrónica, el *Mathematica World*, disponible a través del Ormond College, University of Melbourne, Parkville Victoria 3052, Australia. E-mail: mathematica@matilda.vut.edu.au.

Tabla 1: MANUALES DE REFERENCIA GENERAL SOBRE *MATHEMATICA*

- Abell, M. F y J.Braselton (1992): *Mathematica by Example*, Academic Press
- Abell, M. y J.Braselton (1992): *The Mathematica Handbook*, Academic Press.
- Blachman, N. (1991): *Mathematica: A Practical Approach*, Prentice-Hall (Existe traducción española en Ariel Informática, *Mathematica, un enfoque práctico*, 1993).
- Blachman, N. (1992): *Mathematica Quick Reference*, v.2, Variable Symbols Inc.
- Brown, D., H.Porta y J.Uhl (1990): *Calculus and Mathematica*, AddisonWesley
- Burkhardt, W. (1994): *First Steps in Mathematica*, Springer-Verlag.
- Castillo, E. et al. (1993): *Mathematica*, Ed. Paraninfo.
- Campbell, R. (1992): *Mathematica Help Stack*, v.2, Variable Symbols, Inc.
- Crandall, R. (1991): *Mathematica for the Sciences*, Addison-Wesley.
- Crooke, P. y J.Ratcliffe (1991): *A Guidebook to Calculus with Mathematica*, Wadsworth.
- Domínguez, J. et al. (1994): *Mathematica: fundamentos y aplicaciones de la informática en matemáticas*, Plaza Universitaria Ediciones.
- Ellis, W. y E.Lodi (1990): *A Tutorial Introduction to Mathematica*, Brooks/Col
- Gray, T. y J. Glynn (1992): *The Beginner's Guide to Mathematica v.2*, Addison-Wesley.
- Gray, T. y J. Glynn (1991): *Exploring Mathematics with Mathematica*, Addison-Wesley.
- Kaufmann, S. (1994): *Mathematica as a Tool*, Birkhäuser.
- Maeder, R. (1991): *Programming in Mathematica*, 2nd.ed., Addison-Wesley.
- Pérez, C. (1995): *Cálculo Simbólico y Numérico con Mathematica*, Ra-Ma, Madrid.
- Shaw, W. y J.Tigg (1993): *Applied Mathematica: Getting Started, Getting It Done*, Addison-Wesley.
- Shuchat, A. y F.Shultz (1994): *The Joy of Mathematica: A Point-and-Click Way to Use and Learn Mathematica*, Addison-Wesley.
- Smith, C. (1993): *The Mathematica Graphics Guidebook*, Addison-Wesley.
- Vardi, I. (1991): *Computational recreations in Mathematica*, Addison-Wesley.
- Wagon, S. (1991): *Mathematica in Action*, W.H.Freeman.
- Wolfram, S. (1991): *Mathematica: a System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley.
-