

Andreu Mas-Colell

# La teoría del equilibrio económico general: un enfoque diferenciable

Madrid, Fundación Argentaria, 1994  
(Traducción de A. Manresa)

**JULIO SEGURA**

Fundación Empresa Pública y U. Complutense

**E**ste libro es la traducción al español de *The Theory of General Economic Equilibrium: A Differentiable Approach* (Cambridge University Press, 1985). ¿Por qué reseñar la traducción de un texto disponible desde hace 9 años? ¿Qué aporta este texto a la prestigiosa lista de libros sobre equilibrio general (EG) de la década anterior [Arrow y Hahn (1971), o Hildenbrand y Kirman (1976)]? La contestación a ambas preguntas, aunque la segunda será objeto de más precisiones, es que estamos en presencia de un libro clásico que cabe calificar como el libro emblemático de la tercera etapa de la teoría del EG.

## ALGO DE HISTORIA: LAS DOS PRIMERAS ETAPAS DE LA TEORÍA DEL EG

Como es sabido, la *primera etapa de la teoría del EG*, cuya obra pionera es la de Walras (1874), tiene como objetivo demostrar de forma rigurosa el teorema de la mano invisible, es decir, las propiedades básicas de un sistema de asignación de recursos descentralizado en el que toda la información relevante es transmitida por los precios y donde los agentes individuales (consumidores y productores) toman sus decisiones individuales teniendo en cuenta sólo los precios.

Para ello es preciso formalizar el comportamiento de los agentes como optimizadores, es decir, como maximizadores de su función objetivo sometida a restricciones. Esto permite obtener funciones de demanda de bienes y oferta de factores (de los consumidores) y funciones de demanda de factores y oferta de bienes (de las empresas) individuales. Estas funciones pueden agregarse por bienes, dando lugar a funciones de exceso de demanda total para todos los productos  $z(\mathbf{p})$ .

Los precios serán capaces de coordinar las decisiones de los agentes, es decir, la conducta optimizadora de todos ellos será simultáneamente compatible, si existe al menos un vector de precios ( $\mathbf{p}$ ) que haga no positivos los excesos de demanda de todos los bienes. Una vez hecho esto, se puede entrar en el terreno relevante de la estática comparativa.

¿Qué tipo de instrumental matemático se requiere para esto? Fundamentalmente *cálculo diferencial* para resolver los problemas de optimización individual y, como sabemos hoy en día, pero no se sabía en la época de Walras (ni hasta

la tercera década del siglo XX), algo de topología. Esta última fue sustituida por la comprobación de que el número de ecuaciones linealmente independientes definidoras de un EG era igual al de incógnitas.

Cabe decir que hasta las obras de Hicks (1939) y Samuelson (1947), que constituyen la culminación de esta primera etapa [y con la notable excepción de Wald (1936)], todo son perfeccionamientos del planteamiento básico de Walras.

La *segunda etapa de la teoría del EG* trata de responder a la debilidad señalada: la igualdad entre el número de ecuaciones linealmente independientes y el de incógnitas no garantiza ni la existencia de solución ni, menos aún, que ésta implique precios no negativos. Para ello es preciso utilizar el concepto de *convexidad* y la *topología* (teoremas del punto fijo). Y ello constituye la aportación fundamental de los trabajos pioneros de Debreu (1951), Arrow (1951), Arrow-Debreu (1954), que culminan en la obra más significativa de esta etapa: la de Debreu (1959).

¿Qué es lo que se obtiene de esta segunda etapa? Sintetizando, dos tipos de resultados fundamentales. El primero, un conjunto de condiciones suficientes que garantizan la existencia de EG y que, en lo esencial, son condiciones relativas a la continuidad y homogeneidad de las funciones de exceso de demanda y al cumplimiento de la llamada Ley de Walras. En segundo lugar, distintos conjuntos de condiciones suficientes que aseguran la unicidad y estabilidad del EG<sup>1</sup>.

El interés del tema de existencia de EG es obvio: un mecanismo de asignación de recursos que no ofrezca equilibrio carecerá de valor desde cualquier punto de vista. Pero, ¿qué interés tienen la unicidad y la estabilidad del EG? Puede parecer un tema puramente académico, pero no lo es: si un modelo tiene 'muchos' equilibrios cabe sospechar que tendrá menor capacidad de predicción que otro con menor número de equilibrios; si los equilibrios estables se encuentran muy 'alejados' entre sí, el modelo predice cambios bruscos en los equilibrios, lo que no parece adecuarse a los hechos observados (y, además, impide el uso del cálculo diferencial, válido sólo en un entorno del equilibrio). Como veremos enseguida, el análisis de estos problemas constituye un aspecto central de la tercera etapa de la teoría del EG.

Las condiciones que garantizan unicidad y estabilidad (por tanto, global) son muy restrictivas, ya que exigen especificaciones muy precisas sobre la distribución y las preferencias: sustituibilidad entre todos los bienes, o cumplimiento del axioma débil de preferencia revelada de las  $z(\mathbf{p})$ , o diagonal dominante negativa, etcétera. La restrictividad de los supuestos precisos para garantizar esto es lo que ha dado lugar a la conocida lectura prescriptiva-negativa de la teoría del EG de Hahn.

### LA TERCERA ETAPA DE LA TEORÍA DEL EG

Aquí se inicia la *tercera etapa de la teoría del EG*, que es donde se inserta plenamente la obra comentada de Mas-Colell. Tras las dos primeras etapas disponemos de un modelo —en la jerga profesional, el modelo Arrow-Debreu— que presenta una propiedad muy deseable: la existencia de equilibrio sobre la base de muy pocas hipótesis fundamentales. Pero, a cambio de ello, presenta una propie-

---

(1) Y otros muchos avances, como la existencia de la función de utilidad, el análisis de no convexidades, la axiomatización de la elección en condiciones de incertidumbre, y un largo etcétera.

dad preocupante: es muy fácil que existan varios equilibrios y, si hay más de uno, algunos son inestables.

En efecto, pensemos en el caso más sencillo: dos bienes normales y dos consumidores. Si los efectos renta son fuertes y asimétricos o las relaciones de sustituibilidad son débiles (complementos), es fácil encontrar que las funciones de exceso de demanda de cada bien no son monótonamente decrecientes respecto a su precio: existen varios equilibrios.

¿Es malo esto? En cierto sentido sí, porque dificulta la estática comparativa, hace que algunos equilibrios sean inestables y plantea algunos otros problemas. Desde este punto de vista, el ideal sería disponer de una teoría del EG que presentara un solo equilibrio globalmente determinado. Pero esta ventaja implica costes analíticos importantes: es preciso introducir mucha estructura en el modelo y, por tanto, el mismo será más débil en el sentido de requerir ‘demasiados’ supuestos.

¿Existe un punto intermedio adecuado? Parece que sí: un número finito de equilibrios localmente aislados. Expresado en otros términos, lo que resultaría muy perjudicial es que la economía presentara un *continuo* de equilibrios, porque en ese caso sería imposible realizar ejercicios de estática comparativa, con lo que el valor de la teoría se desvanecería. Es decir, un compromiso razonable entre determinismo y restrictividad de los supuestos en la teoría del EG parece ser abandonar el ideal de la determinación global del (único) equilibrio y buscar –más modestamente– propiedades de *determinación local*.

Desde el punto de vista conceptual, la referencia analítica clave es la de *economía regular* cuya idea intuitiva es sencilla. Si pequeños cambios en los precios afectan fuertemente a los excesos de demanda o si, en un entorno del equilibrio, los excesos de demanda son insensibles a las variaciones de los precios, la economía responderá mal a los parámetros cruciales de la misma (los precios), por lo que una economía regular será aquella en que los excesos de demanda respondan ‘adecuadamente’ a los precios. En caso contrario, en que los excesos de demanda no responden de forma continua a los precios, nos encontraremos en presencia de *economías críticas*.

El problema de determinación y robustez del conjunto de equilibrios de una economía se convierte así, por tanto, en el problema de determinación del tamaño del conjunto de las economías críticas. Y los resultados son, por fortuna, satisfactorios: el conjunto es muy pequeño bajo condiciones bastante generales. Por mencionar el resultado pionero [Debreu (1970)], si las dotaciones iniciales se distribuyen aleatoriamente entre los agentes con la única restricción de adecuarse a alguna densidad de probabilidad, los equilibrios de la economía son aislados con probabilidad uno.

Desde el punto de vista del *instrumental matemático*, lo crucial va a ser, por tanto, que el equilibrio pueda expresarse como la solución de un sistema de ecuaciones linealmente independientes cuyo número coincida con el de incógnitas: un viejo tema *walrasiano*. Y para esto, las propiedades relevantes son las de *transversalidad* que permiten obtener las condiciones bajo las cuales el conjunto de valores singulares de una función tiene medida cero (*v gr.*: teorema de Sard), y que dependen del orden de diferenciabilidad de las funciones. Expresado en términos algo más intuitivos, cualquier estudiante recordará que las demostraciones más difíciles de la teoría del EG de la segunda etapa tenían que ver con la

continuidad. Técnicamente resulta más sencillo recurrir a la suavización<sup>2</sup> de las economías para, a continuación, aplicar métodos diferenciales.

## EL LIBRO DE ANDREU MAS-COLELL

Por comenzar con una valoración global –no local– cabe decir que la *Teoría del Equilibrio Económico General. Un Enfoque Diferenciable* es el libro de la tercera etapa del análisis de EG, de igual forma que el texto de Samuelson (1947) es el libro de la primera etapa, o el de Arrow y Hahn (1971) es el de la segunda. Para que no parezca una comparación desmedida, producto de la amistad personal, el lector debe observar que los textos elegidos en las dos primeras etapas no son el de Walras ni el de Debreu, sino lo que cabría llamar estados finales de la cuestión muy avanzados. Esto indica que el libro de Mas-Colell es, como los dos últimos, una revisión; pero una revisión en la frontera del conocimiento y realizado por una persona que ha hecho aportaciones originales y seminales en el campo (por citar sólo algunos, sus trabajos de 1974, 1975 y 1977).

Los capítulos 2 a 4 (el 1 es un compendio matemático) son más clásicos, dedicándose a la reformulación de la teoría del comportamiento de los agentes individuales y a la definición y propiedades del equilibrio, pero sobre la base de economías suavizadas<sup>3</sup>.

Los capítulos centrales son el 5 y el 7 (el 6 trata los temas del 5 para economías con producción y no de intercambio puro). Como carece de sentido resumir los resultados, tan sólo comentaré un caso que demuestra el poder del enfoque diferenciable para resolver el problema de existencia y derivar en el camino otros resultados relevantes: la secuencia de proposiciones 5.5.1 a 5.5.7 (págs. 211-215).

La 5.5.1 demuestra que el conjunto de vectores de precios de equilibrio de una economía regular en la esfera unitaria es compacto; la 5.5.2 que es finito. La 5.5.3 es crucial y de enorme elegancia: la suma para todos los vectores de precios de equilibrio (en una economía regular) del índice  $p^4$  es igual a +1. Esto, que puede parecer abstruso, tiene un sentido intuitivo claro: la función  $z(p)$  corta al eje de abscisas (valor nulo) ‘desde arriba’ una vez más que ‘desde abajo’.

La importancia de 5.5.3 es clara: en 5.5.4 se demuestra que una economía regular tiene un número de equilibrios impar y, por tanto, presenta como mínimo un equilibrio, por lo que la existencia está demostrada. Las dos siguientes proposiciones demuestran que la 5.5.3 agota toda la información contenida en los vectores de precios de equilibrio. Aunque la inversión en instrumental previa pueda ser elevada, la potencia y rapidez de las demostraciones es impresionante.

Sería absurdo decir que el libro es fácil, pero su dificultad no es mayor de lo que fue entender a fines de la década de los años 50 el texto de Samuelson sabiendo cálculo diferencial o el de Arrow-Hahn a comienzos de la década de los años 70 conociendo, además, topología y teoría de la convexidad.

---

(2) Unas preferencias son suaves si son  $r \geq 2$  veces continuamente diferenciables y estrictamente convexas diferenciablemente.

(3) “Alisadas” en la versión española.

(4) El índice de un vector de precios  $p$  es  $+(-)1$  según que el jacobiano de  $z(p)$  orlado con  $p$  y  $-p$  sea positivo (negativo).

Pero dentro de esta dificultad inevitable, el libro de Mas-Colell presenta muchas ventajas. En primer lugar, está excelentemente escrito y articulado (cosa, por ejemplo, que no sucede en Arrow-Hahn). En segundo lugar, el autor ha realizado un notorio esfuerzo por facilitar interpretaciones intuitivas de resultados formalmente muy complejos, sin caer en simplificaciones que los desvirtúen. Por último, el libro está lleno de ejemplos concretos que facilitan en buena medida su comprensión. Todo esto no hace sino corroborar lo que sabíamos hace tiempo quienes hemos tenido la suerte de escuchar exposiciones de Mas-Colell: su calidad y claridad como profesor.

En resumen, aunque cabe pensar que todos los interesados en la teoría del EG avanzada conocían el libro de Andreu Mas-Colell hace ya una década, sea bien venida su traducción, porque es el clásico de la tercera etapa de la teoría del EG —un paradigma central del análisis económico— y porque éste debería ser, sin lugar a dudas, el texto sobre el que se articule la enseñanza de la teoría del EG en segundos y terceros ciclos de la especialidad de fundamentos del análisis económico.



#### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arrow, K.J. (1951): "An extension of the basic theorems of classical welfare economics", en J. Neyman (ed.) *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, págs. 507-32, University of California Press.
- y Debreu, G. (1954): "On the existence of an equilibrium for a competitive economy", *Econometrica*, vol. 22, págs. 265-290.
- Arrow, K.J. y Hahn, F.M (1971): *General Competitive Analysis*, Holden-Day, San Francisco.
- Debreu, G. (1951): "The coefficient of resource allocation", *Econometrica*, vol. 19, págs. 273-92.
- (1959): *Theory of Value. An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, Wiley, N. York.
- (1970): "Economies with a finite set of equilibria", *Econometrica*, vol. 38, págs. 387-392.
- Hicks, J.R. (1939): *Value and Capital*, Clarendon Press, Oxford.
- Hildenbrand, W. y Kirman, A.P. (1976): *Introduction to Equilibrium Analysis*, North-Holland, Amsterdam.
- Mas-Colell, A. (1974): "Continuous and smooth consumers: Approximation Theory", *Journal of Economic Theory*, 8, págs. 305-336.
- (1975): "On the continuity of equilibrium prices in constant returns production economies", *Journal of Mathematical Economics*, 2, págs. 21-33.
- (1977): "Regular, nonconvex economies", *Econometrica*, vol. 45, págs. 1387-1407.
- Samuelson, P.A. (1947): *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.
- Wald, A. (1936): "On some systems of equations in mathematical economics", *Econometrica* 1951, vol. 19, págs. 368-403. Traducción del original alemán.
- Walras, L. (1874): *Éléments d'économie Politique Pure ou Théorie de la Richesse Sociale*, Corbaz, Lausanne (1.<sup>a</sup> ed.); edición definitiva 1926.